Løsningsforslag, MAT 1001, høsten 2011

Oppgave 1

Et inhomogent lineært likningssystem er gitt ved

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ 2x-y+2z &= 3 \\ 2x+y+\alpha z &= 1 \end{cases}$$

hvor α er et reelt tall. For et bestemt valg av α har likningssystemet uendelig mange løsninger. Finn denne verdien for α og skriv opp alle løsningene av likningssystemet i dette tilfellet.

Løsning. Determinanten til koeffisientmatrisen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = -3\alpha + 6 = 0$$

gir $\alpha = 2$. I dette tilfellet får vi $y = -1$ og $z = -x$, som gir løsninger

$$(x, y, z) = (x, -1, 1-x) = (0, -1, 1) + x(1, 0, -1)$$

Oppgave 2

En funksjon $y = f(x)$ er bestemt av at $f'(x) = x \cdot \ln x$ og $f(1) = 0$. Finn funksjonen.

Løsning. Vi bruker delvis integrasjon med $u = \ln x$ og $v' = x$. Det gir $u' = \frac{1}{x}$ og $v = \frac{1}{2}x^2$.

$$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Betingelsen $f(1) = 0$ gir $-\frac{1}{4} + C = 0$, dvs. $C = \frac{1}{4}$, og spesiell løsning

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$$

Oppgave 3

Et prosjektil blir skutt vertikalt opp fra jordoverflaten med utgangshastighet v_0. Prosjektilet bremses av luftmotstanden og tyngdekraften slik at farten $v(t)$ til prosjektilet kan beskrives av differensiallikningen

$$v' + kv = -g$$

hvor k er en positiv konstant og g er tyngdens akselerasjon. For enkelthets skyld setter vi i denne oppgaven $k = 0,05$ og $g = 10$. Løs likningen og finn et uttrykk for farten $v(t)$ uttrykt ved v_0. Ved tidspunktet $t = \tau$ når prosjektilet det høyeste punktet på banen, dvs. at $v(\tau) = 0$. Finn et uttrykk for τ.

Løsning.

$$v = e^{-kt} \int e^{kt}(-g)dt = e^{-kt}(-\frac{g}{k}e^{kt} + C) = -\frac{g}{k} + Ce^{-kt}$$

Innsatt verdier for k og g:

$$v = -200 + Ce^{-kt}$$

Initialbetingelsen $v(0) = v_0$ gir $-200 + Ce^0 = -200 + C = v_0$, eller $C = v_0 + 200$, altså

$$v = -200 + (v_0 + 200)e^{-kt}$$

Videre har vi

$$v = -200 + (v_0 + 200)e^{-k\tau} = 0$$

som gir

$$\tau = -\frac{1}{0,05} \ln \frac{200}{v_0 + 200} = 20 \ln (1 + \frac{v_0}{200})$$

Oppgave 4

En 2. ordens differensiallikning er gitt ved

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

Finn den spesielle løsningen av differensiallikningen som tilfredsstiller initialbetingelsene $y(0) = 1$ og $y'(0) = 1$.

Løsning. Karakteristisk polynom $r^2 + 2r + 2 = 0$ gir $r = -1 \pm i$, og løsning

$$y = e^{-x}(C \cos x + D \sin x)$$

Setter inn $1 = y(0) = C$ og regner ut den deriverte

$$y' = -e^{-x}(C \cos x + D \sin x) + e^{-x}(-C \sin x + D \cos x)$$

som gir $1 = y'(0) = -C + D$, dvs. $C = 1$ og $D = 2$, og spesiell løsning

$$y = e^{-x}(\cos x + 2 \sin x)$$

Oppgave 5

Torricellis lov sier at vannmengden som renner ut av et hull i bunnen på en tank pr. tidsenhet er proporsjonal med kvadratroten av høyden av vannet i tanken og arealet av hullet. Vi tenker oss en sylindrisk tank med grunnflate A og et hull med areal a. Vi lar $y(t)$ være vannhøyden i tanken ved tiden t. Det gir oss en differensiallikning

$$\frac{d}{dt}(aA \cdot y) = -k\sqrt{y}, \qquad k > 0$$

Løs likningen når vi antar at vannhøden til å begynne med var $y(0) = h$.

Løsning. Dette er en separabel likning. Vi separerer variable og integrerer

$$2\sqrt{y} = \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\frac{k}{aA}dt = -\frac{k}{aA}t + C$$

Dette gir

$$4y = (-\frac{k}{aA}t + C)^2$$

eller

$$y = \frac{1}{4}(-\frac{k}{aA}t + C)^2$$

Betingelsen $y(0) = h$ gir $h = \frac{1}{4}(0 + C)^2$ eller $C = 2\sqrt{h}$, mao.

$$y = (-\frac{k}{2aA}t + \sqrt{h})^2$$